

**NOTE SUR UN
PROBLÈME
D'ANALYSE
INDÉTERMINÉE PAR
M. EUGÈNE CATALAN**

Eugène Catalan





NOTE

301
13

SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

PAR

M. EUGÈNE CATALAN

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.



EXTRAIT DES *ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI*

TOME XX. — ANNÉE XX. SÉANCE 1^{re} DU 2 DÉCEMBRE 1866.



ROME

IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

1866

NOTE

SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

PROBLÈME — *Trouver plusieurs cubes entiers, consécutifs, dont la somme soit un carré (*)*.

I.

A cause de la relation

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

on a

$$x^3 + (x+1)^3 + \dots + (x+y-1)^3 = \frac{y}{8} (2x+y-1) [4x^2 + 4(y-1)x + 2y(y-1)];$$

ou, en représentant par s la somme des y cubes, et en posant

$$2x + y - 1 = z \quad (1);$$

$$16s = 2yz(y^2 + z^2 - 1) \quad (2).$$

D'après l'égalité (1), y et z sont de *parités différentes*. Par suite, $2yz$ et $y^2 + z^2 - 1$ sont divisibles par 4. Donc s sera un carré si le second membre de l'équation (2) est un carré.

Soient

$$2yz = \alpha, \quad y^2 + z^2 + 1 = \beta, \quad y + z = \lambda, \quad z - y = \mu, \quad s = t^2 \quad (3);$$

il nous aurons

$$\alpha\beta = 16t^2, \quad \alpha - \beta + 1 = \lambda^2, \quad \beta - \alpha + 1 = \mu^2 \quad (4).$$

Ainsi, la question se réduit à trouver deux multiples de 4, α, β , tels que $\alpha\beta$, $\alpha - \beta + 1$, $\beta - \alpha + 1$ soient des carrés.

(*) Cette question m'a été suggérée par la lecture d'un beau Mémoire de M. Angelo Genocchi (*Note sur quelques sommations de cubes*). Bien que ce savant Géomètre y donne les solutions rationnelles de l'équation générale

$$x^2 + (x+r)^2 + (x+2r)^2 + \dots + (x+nr-r)^2 = y^2,$$

il m'a semblé intéressant de chercher les solutions entières de l'équation particulière

$$x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+n-1)^2 = y^2.$$

II.

L'élimination de β , entre la première et la troisième des équations (4), conduit à

$$6M^2 + (\mu^2 - 1)^2 = (2x + \mu^2 - 1)^2 \quad (5).$$

Les solutions entières de cette équation sont données par les deux systèmes de formules :

$$2x + \mu^2 - 1 = u^2 + v^2, \quad \mu^2 - 1 = u^2 - v^2, \quad 4t = uv \quad (6),$$

$$2x + \mu^2 - 1 = u^2 + v^2, \quad \mu^2 - 1 = 2uv, \quad 8t = u^2 - v^2 \quad (6');$$

d'où l'on tire, soit

$$\alpha = v^2, \quad \beta^2 = u^2 \quad (7),$$

soit

$$2x = (u - v)^2, \quad 2\beta = (u + v)^2 \quad (7').$$

Ainsi α , β , ou leurs doubles, sont des carrés.

III.

Les équations (7) équivalent à

$$2yz = v^2, \quad y^2 + z^2 - 1 = u^2 \quad (8).$$

Soit $y = \frac{p}{q} z$, $\frac{p}{q}$ étant irréductible. On déduit de là

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma \quad (9),$$

γ étant un nombre entier. De plus, y et z étant de parités différentes, il en est de même pour p et q ; en outre, γ est impair. Enfin, à cause de $2yz = v^2$, $2pq$ est un carré; ce qui prouve que, des deux nombres p , q , l'un est un carré, et l'autre, le double d'un carré.

Au moyen des valeurs (9), la seconde équation (8) devient

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - u^2 = 1 \quad (10).$$

Dans chaque cas particulier, l'équation (10) fera connaître les valeurs de γ et de u . On aura ensuite

$$y = p\gamma, \quad x = \frac{(q - p)\gamma - 1}{2}, \quad s = 2pq \frac{\gamma^2 u^2}{16} \quad (11).$$

IV.

Si l'on répète, sur les formules (7), des calculs analogues aux précédents, on trouve

$$4yz = (u - v)^2, \quad 2(\gamma^2 + z^2 - 1) = (u + v)^2 = 4u'^2 \quad (8'),$$

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma \quad (9'),$$

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 2u'^2 = 1 \quad (10'),$$

$$y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = pq \frac{\gamma^2 u'^2}{4} \quad (11');$$

cette fois, p et q sont des carrés, l'un pair, l'autre impair (*).

V. APPLICATIONS.

1° $p = 8$, $q = 9$. L'équation (10) devient

$$145\gamma^2 - u'^2 = 1.$$

Elle est vérifiée par $\gamma = 1$, $u = 12$; d'où $x = 1$. En laissant de côté cette solution connue, on en trouve une infinité au moyen de la relation

$$u + \gamma\sqrt{145} = (12 + \sqrt{145})^{2n+1}.$$

Par exemple, $n = 1$ donne

$$u = 6\,948, \quad \gamma = 577;$$

puis

$$\gamma = 4\,616, \quad x = 289, \quad s = (3\,577\,6948)^2.$$

Ainsi

$$289^2 + 290^2 + \dots + 4\,904^2 = (3\,577\,6948)^2.$$

2° $p = 2$, $q = 25$. L'équation (10) est

$$629\gamma^2 - u'^2 = 1.$$

Les valeurs les plus simples sont

$$\gamma = 313, \quad u = 7\,850 \quad (**);$$

d'où

$$\gamma = 626, \quad x = 3\,600, \quad s = (5\,313\,3925)^2.$$

On a donc

$$3\,600^2 + 3\,601^2 + \dots + 4\,225^2 = (5\,313\,3925)^2$$

3° Si, dans la relation

$$u - \gamma\sqrt{629} = (7\,850 - 313\sqrt{629})^{2n+1},$$

on suppose $n = 1$, on trouve :

$$u = 7\,850^2 + 3 \cdot 7\,850 \cdot 313^2 \cdot 629 = 7\,850(7\,850^2 + 3 \cdot 313^2 \cdot 629),$$

$$\gamma = 3 \cdot 7\,850^2 \cdot 313 + 313^3 \cdot 629 = 313(3 \cdot 7\,850^2 + 313^2 \cdot 629).$$

(*) Il ne m'a pas été possible de trouver une solution de l'équation (10'). Pourrait-on démontrer qu'elle n'en admet aucune ?

(**) La table X de Legendre (*Théorie des Nombres*, tome I) renferme une faute typographique : au lieu de 1850, on doit lire 7 850.

Or :

$7\ 850^3 = 61\ 622\ 500$, $313^3 = 97\ 969$, $3 \cdot 313^3 \cdot 629 = 184\ 867\ 503$, $313^3 \cdot 629 = 61\ 622\ 501$;
donc

$$\begin{aligned} u &= 7\ 850(61\ 622\ 500 + 184\ 867\ 503) = 7\ 850 \cdot 246\ 490\ 003 \\ &= 1\ 934\ 946\ 523\ 550, \\ \gamma &= 313(184\ 867\ 500 + 61\ 622\ 501) = 313 \cdot 246\ 490\ 001 \\ &= 77\ 151\ 370\ 313. \end{aligned}$$

Si ces valeurs sont exactes, on doit avoir

$$629 \cdot 77\ 151\ 370\ 313^2 - 1\ 934\ 946\ 523\ 550^2 = 1.$$

En effet :

$$\begin{aligned} 77\ 151\ 370\ 313^2 &= 5\ 952\ 331\ 941\ 173\ 657\ 717\ 969, \\ 629 \cdot 77\ 151\ 370\ 313^2 &= 3\ 744\ 018\ 048\ 998\ 230\ 704\ 602\ 501, \\ 1\ 934\ 946\ 523\ 550^2 &= 3\ 744\ 018\ 048\ 998\ 230\ 704\ 602\ 500; \end{aligned}$$

ec.

Des valeurs précédentes de γ et de u , on tire

$$\begin{aligned} \gamma &= 2\gamma = 154\ 302\ 740\ 626, \quad x = \frac{23\gamma + 1}{2} = 887\ 240\ 758\ 600, \\ x + \gamma - 1 &= 1\ 041\ 543\ 499\ 225, \end{aligned}$$

$$s = \left[\frac{u\gamma}{2} \right]^2 = (967\ 473\ 261\ 775 \cdot 77\ 151\ 370\ 313)^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 887\ 240\ 758\ 600^3 + 887\ 240\ 758\ 601^3 + \dots + 1\ 041\ 543\ 499\ 225^3 = \\ (967\ 473\ 261\ 775 \cdot 77\ 151\ 370\ 313)^3. \end{aligned}$$

Liège, 21 Octobre 1866.

RECTIFICATION ET ADDITION

A LA

« NOTE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE »;

publiée dans les *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*,
Tome XX. — Année XX; Séance 1^{re} du 2 Décembre 1866.

PAR M. EUGÈNE CATALAN.

(Extrait des *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*,
Tome XX. — Année XX; Séance 3^e du 3 février 1867)

M. Lebesgue m'a fait observer que les formules (6) et (6') ne sont pas assez générales : en les écrivant, j'ai supposé, tacitement, les valeurs de t , $\mu^2 - 1$ et $2\alpha + \mu^2 - 1$, premières entre elles deux à deux. Le même manque de généralité se remarque sur les formules (11) et (11'). Néanmoins, les résultats indiqués dans le Paragraphe V sont exacts, comme tous ceux que l'on déduirait des formules citées.

En cherchant à corriger la faute dont je viens de parler, je me suis aperçu que le Problème en question se ramène très simplement à la résolution, en nombres entiers, d'une équation de la forme :

$$Ax^2 - By^2 = 1.$$

Cette nouvelle solution du Problème est l'objet de la présente Note.

I.

Reprenons les équations

$$\begin{aligned} 2xz + y^2 - 1 &= z & (a), & & 2yz = \alpha & (b), & & y^2 + z^2 - 1 = \beta & (c), \\ \alpha\beta &= 16t^2 & (d), & & s &= t^2 & (e). \end{aligned}$$

D'après (a), y et z sont de parités différentes; donc α , β sont des multiples de 4. Soient

$$\alpha = 4\theta u^2, \quad \beta = 4\theta' v^2;$$

θ , θ' ne contenant aucun facteur carré; autrement dit :

$$\theta = abcde \dots, \quad \theta' = a'b'c'd'e' \dots,$$

$a, b, c, d, e, \dots$, d'une part, et $a', b', c', d', e', \dots$, de l'autre, étant des facteurs premiers *inégaux*. A cause de l'équation (d), $\theta\theta'$ doit être un carré; donc

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \quad \dots,$$

ou

$$\theta' = \theta;$$

et, par conséquent,

$$\alpha = 4\theta u^2, \quad \beta = 4\theta v^2 \quad (f).$$

Soient

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma \quad (g),$$

p, q étant deux nombres donnés, l'un *pair*, l'autre *impair*, premiers entre eux.

Les équations (b), (c) deviennent, à cause des valeurs (f) :

$$pq\gamma^2 = 2\theta u^2 \quad (h), \quad (p^2 + q^2)\gamma^2 - 4 = 4\theta v^2 \quad (k).$$

Éliminant θ , on trouve

$$(p^2 + q^2)u^2 - 2pqv^2 = \frac{u^2}{\gamma^2};$$

donc u est divisible par γ :

$$u = \gamma u' \quad (l);$$

et la relation (h) devient

$$pq = 2\theta u'^2 \quad (A).$$

II.

Dans chaque cas particulier, on décomposera donc $\frac{pq}{2}$ en deux facteurs u'^2, θ , dont l'un soit un carré, l'autre n'admettant aucun facteur carré; après quoi l'on cherchera les solutions entières de l'équation

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 4\theta v^2 = 4 \quad (B).$$

Si elle en admet, on emploiera les formules

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad x + y - 1 = \frac{(q+p)\gamma - 1}{2}, \\ s &= (u'v\theta\gamma)^2 \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

III. APPLICATIONS.

1° $p = 3, q = 4$. L'équation (A) donne

$$\theta = 6, \quad u' = 1;$$

en sorte que (B) devient:

— 9 —

$$(5\gamma)^2 - 6(2\nu)^2 = 1. \quad (1)$$

La solution la plus simple est

$$\gamma = 1, \quad \nu = 1;$$

d'où l'on déduit, par exemple,

$$\gamma = 97, \quad \nu = 99;$$

puis

$$x = 49, \quad x + y - 1 = 339, \quad s = (6.97.99)^2.$$

Conséquemment

$$49^2 + 50^2 + 51^2 + \dots + 339^2 = (6.97.99)^2;$$

Ce qui est exact.

2°. $p = 5, q = 8$. On trouve $\theta = 5, u' = 2$, puis

$$89\gamma^2 - 5(2\nu)^2 = 1. \quad (2)$$

Le développement de $\sqrt{\frac{89}{5}} = \frac{\sqrt{445}}{5} = \frac{R}{5}$ en fraction continue donne, comme fractions complètes :

$$\frac{R}{5}, \frac{R+20}{9}, \frac{R+16}{21}, \frac{R+5}{20}, \frac{R+15}{11}, \frac{R+18}{11}, \frac{R+15}{20},$$

$$\frac{R+5}{21}, \frac{R+16}{9}, \frac{R+20}{5}, \frac{R+20}{9}, \frac{R+16}{21}, \text{ etc.}$$

Par conséquent (*), l'équation (2) n'admet aucune solution entière.

3°. $p = 5, q = 12$. On a $u' = 1, \theta = 30$; donc

$$(13\gamma)^2 - 120\nu^2 = 1. \quad (3)$$

Cette équation est vérifiée par

$$13\gamma = 11, \quad \nu = 1;$$

mais, comme la valeur de γ est fractionnaire, on doit recourir à la relation

$$(11 + \sqrt{120})^n = 13\gamma + \nu\sqrt{120},$$

en disposant convenablement de n . Après quelques essais, l'on trouve que $n=9$ donne

$$\gamma = 45\ 575\ 339\ 447, \quad \nu = 54\ 085\ 723\ 209.$$

On conclut, de ces valeurs :

$$169\gamma^2 = 351\ 031\ 854\ 604\ 867\ 350\ 921\ 721,$$

$$120\nu^2 = 351\ 031\ 854\ 604\ 867\ 350\ 921\ 720,$$

$$x = 159\ 513\ 698\ 065,$$

$$x + y - 1 = 387\ 390\ 395\ 299,$$

$$s = (30.45\ 575\ 339\ 447.54\ 085\ 723\ 209)^2.$$

Liège, 30 janvier 1867.

(*) *Théorie des Nombres*, tome I, p. 408.







